Bernd Sumpf 07987 Reudnitz, Eichberg 1 bernd.sumpf@turniersystem.de

Übungsaufgaben

Serie 1 – Prozentaufgaben mit vermehrtem oder vermindertem Grundwert

Beispiel 1a:

Die Wirtschaftsleistung Deutschlands ist 2005 gegenüber dem Vorjahr **um** 1,6% gewachsen. 2004 waren es 2204 Milliarden Euro. Welche Wirtschaftsleistung wurde 2005 erreicht?

Der frühere Wert enspricht 100%, **ist** also **der Grundwert.**
Damit ergibt sich G=2204 Milliarden Euro.
Ein Wachstum um 1,6% ergibt einen neuen Prozentsatz von 100% +1,6%, also p=101,6%
Gesucht ist W. $W=p\cdot G/100\%$ ergibt W=2239,264 Milliarden Euro

Beispiel 1b:

Der Preis für ein Torwarttrikot wurde im Räumungsverkauf **um** 10% gesenkt. Dadurch kostet es nur noch 26,98 €. Wie hoch war der ursprüngliche Preis?

Der frühere Wert ist der Grundwert, damit ist G der gesuchte ursprüngliche Preis.
Eine Senkung um 10% ergibt einen neuen Prozentsatz von 100% –10%, also p=90%
W=26,98 € $G=W\cdot 100\%/p$ ergibt G=29,77777778 €, also G=29,98 €

Beispiel 1c:

Die Energiekosten eines Haushalts von 682,46 € stiegen im folgenden Jahr **auf** 128%. Wieviel Euro waren jetzt mehr zu zahlen?

Der frühere Wert ist der Grundwert, damit ergibt sich G=682,46 €
Ein Wachstum **auf** 128% ergibt eine Erhöhung **um** 28%, es sind damit 28% mehr zu zahlen, also p=28%
Gesucht ist W. $W=p\cdot G/100\%$ ergibt W=191,0888 €, also W=191,09 €

Aufgaben:

1. Die Steuereinnahmen einer Gemeinde betrugen in diesem Jahr 467240 €, damit erhöhten sich diese Einnahmen um 26%. Wie hoch waren die Steuereinnahmen im Vorjahr?
2. Bei der Bürgermeisterwahl erhielt Herr H. nur noch 924 Stimmen, bei der letzten Wahl waren es noch 1007 gewesen. Um wieviel Prozent sank die Stimmenanzahl?
3. Der Benzinpreis stieg von Januar 2006 bis August um 21,2%. Der höchste Preis betrug 1,429 € je Liter. Wie hoch war der Preis im Januar?
4. Im Schlussverkauf wurden alle Preise um 30% gesenkt. Wie viel bezahlt man jetzt noch für ein Paar Schuhe, das vorher 79,90 € gekostet hatte?
5. Der Umfang des Internet-Einzelhandels ist 2006 gegenüber dem Vorjahr um 47% auf einen Wert von 589 Millionen Euro angestiegen (nur Deutschland). Welchen Wert hatte dieser Handel 2005?

6.* Die Einnahmen aus Kapitalvermögen (Zinsen, Dividenden, Gewinne) stiegen 2005 und 2006 jährlich um 15%.
2004 waren es in Deutschland 501,4 Milliarden €.
a) Wie hoch waren diese Einnahmen 2005?
b) Wie hoch waren diese Einnahmen 2006?

erste Hinweise zu Serie 1

1. gesucht ist G
2. G=1007
3. gesucht ist G
4. G=79,90 €
5. gesucht ist G

6a G=501,4 Mrd. €

6b G ist der 2005er Wert, also das Ergebnis von 6a!!!

zweite Hinweise, falls die ersten nicht reichen ...

1. vorher 100%, jetzt 26% mehr
2. gesucht ist der Prozentsatz der Differenz, W=1007−924
3. Der Augustpreis sind 121,2%
4. 30% weniger sind noch 70% des alten Preises
5. vorher 100%, jetzt 47% mehr

6(a und b) vorher 100%, jetzt 15% mehr

Lösungen:

1.	W=467240 €	p=126%	G=W·100%/p	G=370825,40 €
2.	G=1007	W=83	p=W·100%/G	p=8,24%
3.	W=1,429€	p=121,2%	G=W·100%/p	G=1,179 €
4.	G=79,90 €	p=70%	W=p·G/100%	W=55,93 €
5.	W=589 Millionen €	p=147%	G=W·100%/p	G=400,68 Milionen €
6a.	G=501,4 Milliarden €	p=115%	W=p·G/100%	W=576,61 Milliarden €
6b.	G=576,61 Milliarden €	p=115%	W=p·G/100%	W=663,1 Milliarden €

Übungsaufgaben

Serie 2 – Gleichungen und Gleichungssysteme

Beispiel 2a:

$\frac{3}{2} + \frac{5}{9x} = \frac{9}{6x}$ mit Hauptnenner multiplizieren: $| \cdot 18x$

ergibt: $\frac{3 \cdot 18x}{2} + \frac{5 \cdot 18x}{9x} = \frac{9 \cdot 18x}{6x}$

kürzen: $27x + 10 = 27$

x muss alleine stehen, Umkehroperationen nutzen: $|-10$

ergibt $27x = 17 \quad |:27$

$\underline{x = 0{,}629629...}$

Beispiel 2b:

$(x-2)\cdot(4x+3)=(2x-1)^2$ ausmultiplizieren: $4x^2+3x-8x-6 = 4x^2-4x+1 \quad |-4x^2$

$-5x - 6 = -4x + 1 \quad |+5x$

$-6 = x + 1 \quad |-1$

$\underline{-7 = x}$

Beispiel 2c:

(I) $\mathbf{3}x + 2y = 25$

(II) $\mathbf{1}x + 5y = 17$

<u>Additionsverfahren:</u> (I) $\cdot$ **1** und (II) $\cdot$ **3**

ergibt $3x + 2y=25$

und $3x+15y=51$

subtrahieren (II)–(I) $13y=26$ und damit $\underline{y=2}$

in eine der Gleichungen einsetzen: $1x+5\cdot\mathbf{2}=17$

ergibt letztlich $\underline{x=7}$

<u>Einsetzungsverfahren:</u> (II) nach x umstellen: $x=17-5y$

in (I) einsetzen: $3\cdot(17-5y) + 2y = 25$

vereinfachen: $51-15y+2y=25 \quad |-51$

$-13y=-26 \quad |:(-13)$

$\underline{y=2}$ und weiter wie oben ...

Aufgaben:

1. $\frac{4}{15} + \frac{9}{2x} = \frac{7}{6}$

2. $\frac{3}{14} + \frac{9}{7x} = \frac{3}{2x}$

3. $\frac{4}{9x} + \frac{5}{6} = \frac{7}{4}$

4. $\frac{2}{3} + \frac{9}{2x} = \frac{1}{6} + \frac{3}{4x}$

5. $(x-4)\cdot(x+7) = x^2-10$

6. $(x)\cdot(x+5)=(x+2)^2$

7. $(x+5)\cdot(x-2)=(x-3)\cdot(x+8)$

8. $(x+3)\cdot(x+4)=(x-1)\cdot(x+13)$

9. (I) $5x - 2y = 11$
   (II) $2x + 3y = 31$

10. (I) $8x - 4y = 36$
    (II) $4x - 5y = 3$

11. (I) $4x - 3y = 12$
    (II) $x + y = 13{,}5$

12. (I) $x + 9y = 3$
    (II) $3x - y = 2$

Bernd Sumpf 07987 Reudnitz, Eichberg 1 bernd.sumpf@turniersystem.de

erste Hinweise zu Serie 2

1. Hauptnenner = 30x
2. Hauptnenner = 14x
3. Hauptnenner = 36x
4. Hauptnenner = 12x

5. $x^2+7x-4x-28=x^2-10$
6. $x^2+5x=(x+2)\cdot(x+2)$
7. $x^2-2x+5x-10=(x-3)\cdot(x+8)$
8. $x^2+4x+3x+12=(x-1)\cdot(x+13)$

9. $5\cdot(II)-2\cdot(I)$
10. $(I)-2\cdot(II)$
11. (II) nach x umstellen, in (I) einsetzen oder $4\cdot(II)-(I)$
12. (I) nach x umstellen, in (II) einsetzen oder $3\cdot(I)-(II)$

zweite Hinweise, falls die ersten nicht reichen ...

1. $8x + 135 = 35x$
2. $3x + 18 = 21$
3. $16 + 30x = 63x$
4. $8x + 54 = 2x + 9$

5. $3x-28=-10$
6. $x^2+5x=x^2+4x+4$
7. $x^2+3x-10=x^2+5x-24$
8. $x^2+7x+12=x^2+12x-13$

9. (I) $10x-4y=22$
(II) $10x+15y=155$
(II)−(I) $19y=133$

10. (I) $8x-4y=36$
(II) $8x-10y=6$
(I)−(II) $6y=30$

11. (II) $x=13,5-y$
(II)→(I) $4\cdot(13,5-y)-3y=12$

12. (I) $x=3-9y$
(I)→(II) $3\cdot(3-9y)-y=2$

Lösungen:

1. $x=5$
2. $x=1$
3. $x=16/33=0,4848...$
4. $x=-7,5$

5. $x=6$
6. $x=4$
7. $x=7$
8. $x=5$

9. $x=5$; $y=7$
10. $x=7$; $y=5$
11. $x=7,5$; $y=6$
12. $x=0,75$; $y=0,25$

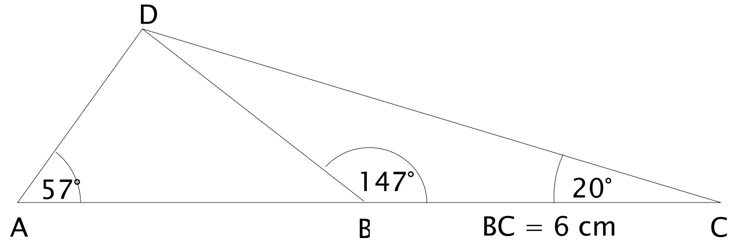
Bernd Sumpf 07987 Reudnitz, Eichberg 1 bernd.sumpf@turniersystem.de

Übungsaufgaben

Serie 3 – Dreiecksberechnung

Beispiel 3a:

Bestimmen Sie die Länge der Strecke AB!



Um AB zu berechnen, brauchen wir 3 Stücke des Dreiecks ABD.

Möglich sind nur die, die an BCD grenzen; also der Winkel ABD und die Seite BD.

Winkel BDC=23°; Sinussatz ergibt BC/sin(23°)=BD/sin(20°)

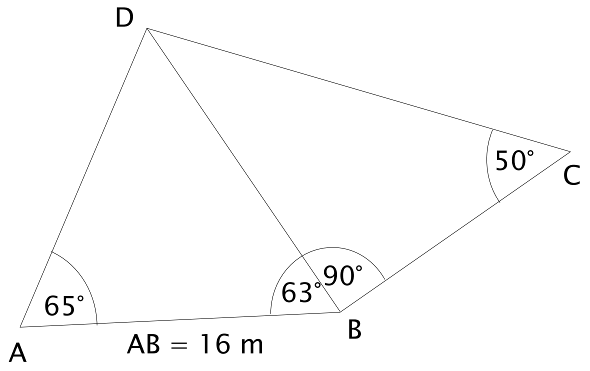
BD=6cm · sin(20°)/sin(23°)   BD=5,252 cm

Winkel ABD=33°, damit Winkel ADB=90°!

BD/AB=sin(57°)   AB=BD/sin(57°)   <u>AB=6,26 cm</u>

Beispiel 3b:

Bestimmen Sie den Umfang des Vierecks!



In dem Teil anfangen, wo schon drei Stücke bekannt sind!

Winkel ADB=52°

Sinussatz: 16m/sin(52°)=AD/sin(63°)

und   16m/sin(52°)=BD/sin(65°)

→ AD=18,09m; BD=18,40m

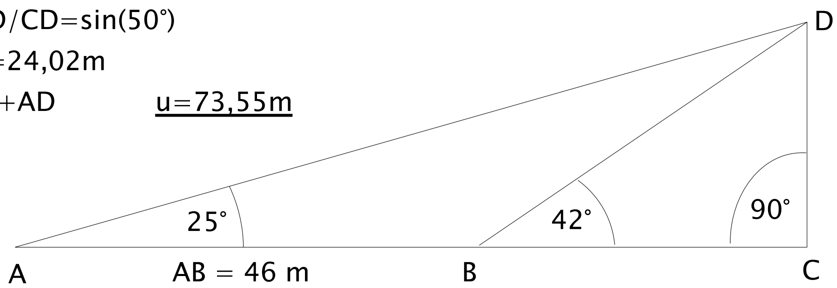
BD/BC=tan(50°) und BD/CD=sin(50°)

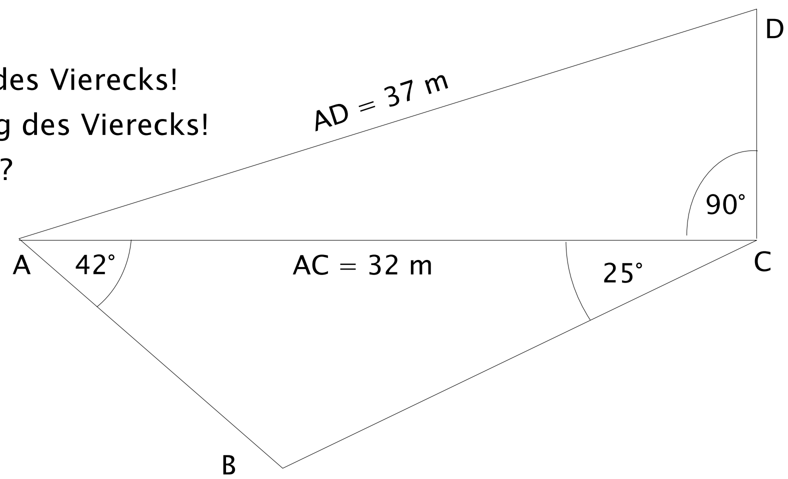
→ BC=15,44m ; CD=24,02m

Umfang u=AB+BC+CD+AD   <u>u=73,55m</u>

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie die Länge der Strecke CD!





2a. Bestimmen Sie die Fläche des Vierecks!

2b. Bestimmen Sie den Umfang des Vierecks!

2c*. Wie lang ist die Strecke BD?

Bernd Sumpf 07987 Reudnitz, Eichberg 1 bernd.sumpf@turniersystem.de

erste Hinweise zu Serie 3

1. Winkel ABD; Winkel ADB; Seite BD; Seite CD
2a Seite CD,obere Teilfläche; Winkel ABC,Seite AB (oder BC), untere Teilfläche
2b die eine noch fehlende Seite AB oder BC berechnen
2c Dreieck BCD betrachten

zweite Hinweise, falls die ersten nicht reichen ...

1. Winkel zusammen 180°; Innenwinkel; Sinussatz; Sinus
2a Pythagoras, ½ab; Innenwinkel,Sinussatz, $\frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma$
2b Sinussatz
2c zwei Seiten und der dazwischen liegende Winkel sind bekannt → Kosinussatz

Lösungen:

1. $\sphericalangle ABD=138°; \sphericalangle ADB=17°; BD/\sin(25°)=AB/\sin(17°) \rightarrow BD=66{,}49m$
   $CD/BD=\sin(42°) \rightarrow CD=44{,}49m$ also $\underline{\approx 44{,}5m}$

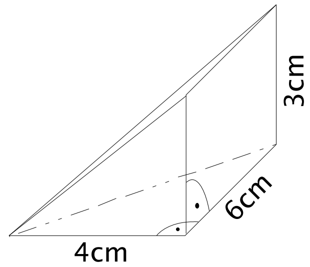
2a $CD^2=AD^2-AC^2 \rightarrow CD=18{,}574m \quad A_1=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot CD=297{,}19m^2$
   $\sphericalangle ABC=113°, AC/\sin(113°)=AB/\sin(25°) \rightarrow AB=14{,}692m$
   $A_2=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot CD\cdot \sin(42°)=157{,}29m^2$
   $\underline{A=454{,}48m^2}$

2b $AC/\sin(113°)=BC/\sin(42°) \rightarrow BC=23{,}26m$
   $u=AB+BC+CD+AD$ $\underline{u=93{,}52m}$

2c $\sphericalangle BCD=90°+25°=115°$ $BD^2=BC^2+CD^2-2\cdot BC\cdot CD\cdot \cos(115°) \rightarrow \underline{BD=35{,}37m}$

<u>Übungsaufgaben</u>

<u>Serie 4 – Flächen und Körper</u>



Beispiel 4a

Bestimmen Sie das Volumen des abgebildeten Körpers!

Zuerst Art des Körpers bestimmen und entscheiden, welche Fläche die Grundfläche ist.

Hier: <u>Pyramide</u> (Die Grundfläche ist das Rechteck, das nach rechts zeigt; alle anderen Flächen sind Dreiecke, die an der Spitze der Pyramide (links) zusammentreffen.)

Im Tafelwerk die entsprechende Formel suchen: $V=⅓A_G \cdot h$

Werte einsetzen, manches muss erst noch berechnet werden

(A_G ist die Rechtecksfläche: $A_G=a \cdot b$ $A_G=6cm \cdot 3cm$ $A_G=18cm^2$)

Die Körperhöhe h steht immer senkrecht zur Grundfläche, hier ist es deshalb die 4cm–Kante.

$V=⅓ \cdot 18cm^2 \cdot 4cm$ $\underline{V=24cm^3}$

Beispiel 4b

Wie lang ist die im Bild verdeckte Kante?

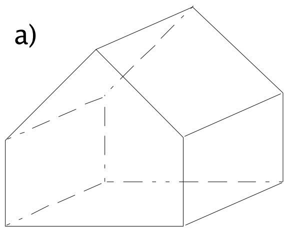
Suchen Sie ein geeignetes, möglichst ein rechtwinkliges, Dreieck!

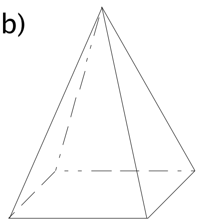
Hier: untere Fläche

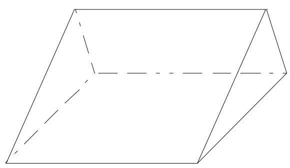
Pythagoras: $(4cm)^2+(6cm)^2=x^2$ $52cm^2=x^2$ $\underline{x=7{,}21cm}$

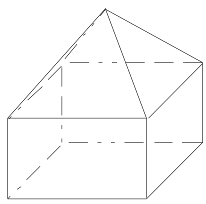
Aufgaben:

1. Bestimmen Sie die Art des Körpers und die Grundfläche!

a) 

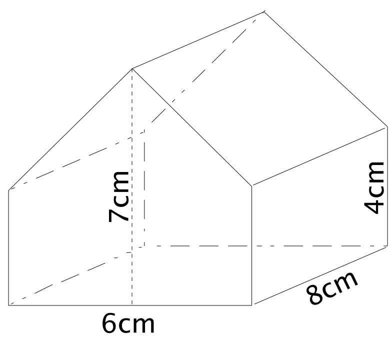
b) 

c) 

d) 

2a Bestimmen Sie das Volumen des Körpers!

2b Bestimmen Sie den Oberflächeninhalt des Körpers!



Bernd Sumpf 07987 Reudnitz, Eichberg 1 bernd.sumpf@turniersystem.de

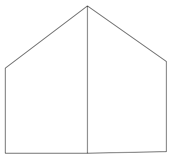
<u>erste Hinweise zu Serie 4</u>

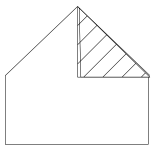
1. Prisma: Grund- und Deckfläche sind gleiche Vielecke
(Dreieck/Viereck/Fünfeck...) ; alle anderen Flächen sind Rechtecke
Pyramide: Die Grundfläche ist ein Vieleck ; alle anderen Flächen sind Dreiecke, die eine Punkt (die Spitze der Pyramide) gemeinsam haben.
Es gibt Körper, die aus zwei Teilkörpern zusammengesetzt sind.

2a Körper von 1a; Grundfläche zur Berechnung von A_G in zwei gleiche Vierecke zerlegen – siehe Skizze!
2b Länge der „Dachschrägen": Mit Pythagoras, suchen Sie ein passendes Dreieck!

<u>zweite Hinweise, falls die ersten nicht reichen ...</u>

1a Grundfläche ist vorn (oder hinten) 1b Grundfläche ist unten
1c Grundfläche ist rechts (oder links) 1d zwei Teilkörper

2a

A_G sind zwei Trapeze mit a=7cm, c=4cm und h=3cm

2b

Dachschrägen x im skizzierten Dreieck mit den Seiten 3cm; 3cm; x
Oberfläche=2 · A_G („Giebelwand") + "Boden" + 2 · "Seitenwand" + 2 · "Dachfläche"

<u>Lösungen:</u>

1a Prisma mit Fünfeck als Grundfläche, Grundfläche ist im Bild vorn
1b Pyramide mit rechteckiger Grundfläche, Grundfläche im Bild unten
1c Prisma mit dreieckiger Grundfläche, Grundfläche im Bild seitlich
1d Quader mit aufgesetzter Virecks-Pyramide, Grundfläche(n) im Bild unten

2a Körper aus 1a: Prisma $V=A_G \cdot h$

$A_G=2 \cdot A_{Trapez}$ $A_{trapez}=½ \cdot (a+c) \cdot h = ½ \cdot (7cm+4cm) \cdot 3cm = 16{,}5cm^2$

$A_G=2 \cdot 16{,}5cm^2=33cm^2$

$V=33cm^2 \cdot 8cm=\underline{264cm^3}$

2b Dreieck siehe Hinweis 2: $x^2=(3cm)^2+(3cm)^2 \rightarrow x=4{,}243cm$

Teilflächen: Fünfeck $A_G=33cm^2$
„Boden" $A_1=6cm \cdot 8cm=48cm^2$
„Seitenwand" $A_2=4cm \cdot 8cm=32cm^2$
„Dachfläche" $A_3=4{,}24cm \cdot 8cm=33{,}94cm^2$

$A_O=2 \cdot A_G+A_1+2 \cdot A_2+2 \cdot A_3$

$A_O=2 \cdot 33cm^2+48cm^2+2 \cdot 32cm^2+2 \cdot 33{,}92cm^2$

$\underline{A_O=245{,}88cm^2 \approx 246cm^2}$