Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung

Komplex 1 – Grundlagen der Mathematik

1.1.) Führen Sie die Polynomdivision aus!

$$(2x^5+3x^4-2x^3+6x^2-19x+8) : (2x^2+5x-3)$$

1.2) Lösen Sie die folgende Aufgabe mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems!

Schnapspanscher Eddy O`Neill soll 200 Liter Kirschlikör mit einem Alkoholgehalt von 25% und einem Saftanteil von 7% liefern.
In seinem Keller hat er noch ausreichende Mengen seiner Sorten "Abendtau" (20% Alkohol und 10% Saft) und „Billy's Nebel" (16% Alkohol und 6% Saft).
Außerdem kann er noch mit seinem selbst gebrannten „Mondscheinwodka" (60% Alkohol, kein Saft) „verdünnen".
Wie viel Liter jeder Sorte muss er verwenden, um den gewünschten Likör zu erhalten?

Komplex 2 – Höhere Mathematik

2.1) Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{(x^2-3x+2)}{(x^2-x-6)}$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion, Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen und das Verhalten der Funktion im Unendlichen!
b) Ermitteln Sie die Extremstellen der Funktion und weisen Sie die Art der Extrema nach!
c) Skizzieren Sie den Graph der Funktion im Intervall [–5;5]!

2.2) Eine Exponetialfunktion der Form $f(x)=c\cdot a^x$ geht durch die Punkte P (3;1,35) und Q (4;2,025).
a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.
b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt P!

2.3) Gegeben sind die Funktionen $f(x)=0{,}3x^2-2x-3$ und $g(x)=-0{,}2x^2-1x-1$
a) Skizzieren Sie die Funktionen im Intervall [–3;5]!
b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen dieser Funktionen eingeschlossen ist!

Komplex 3 – Fachspezifische Mathematik

3.1) Gegeben sind die komplexen Zahlen
$a=3+2j$; $b=4(\cos 30°+j\cdot\sin 30°)$ und $c=3\cdot e^{j\cdot 120°}$
Berechnen Sie: a^3 $\sqrt[4]{b}$ $\ln c$
Geben Sie die Ergebnisse (bei ln c einen der Werte) in der Exponentialform an!

3.2) a) Bestimmen Sie alle (komplexen) Lösungen der Gleichung $x^2 = 4x - 5$!
b) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Vieta, dass $x_1 = -2 + j\cdot\sqrt{3}$ und $x_2 = -2 - j\cdot\sqrt{3}$ die Lösungen der Gleichung $0 = x^2 + 4x + 7$ sind!

3.3) Gegeben sind die Punkte A (3;1;1) ; B (7;7; 9) und C (1;4;7).
a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist!
b) Bestimmen Sie die Größe des Winkels $\beta = \sphericalangle ABC$!
c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC!
d) Bestimmen Sie den Punkt D so, dass das Viereck ABCD ein Trapez mit $\overrightarrow{AB} = 4\cdot\overrightarrow{DC}$ ist!

Komplex 4 – Höhere Mathematik zur Erlangung der Fachhochschulreife

4.1) Die Seitenkanten s einer quadratischen Pyramide sind 10 Meter lang.
Bei welcher Länge a der Grundkanten der Pyramide ist das Volumen am größten?
a) Fertigen Sie eine Skizze an!
b) Stellen Sie die Zielfunktion und die Nebenbedingungen auf!
c) Lösen Sie das Extremwertproblem!
d) Bestimmen Sie die Höhe h, die Länge der Grundkanten a und das Volumen dieser Pyramide!

Wählen Sie von den Aufgaben 4.2.1 und 4.2.2 eine aus und lösen diese!

4.2.1) Eine gebrochen rationale Funktion hat eine Funktionsgleichung der Form

$$f(x) = \frac{a\cdot x^2 + b}{x^2 + c\cdot x}$$

Die Funktion hat eine Lücke bei x=–2 verläuft durch den Punkt P (4;1).
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung!

4.2.2) Bestimmen Sie die Gleichungen aller Asymptoten der Funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 2}{x^2 - x} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{x^2 - x}{x+1} \quad !$$

Lösungen:

1.1) $(x^3 - x^2 + 3x - 6)$ Rest: $(20x - 10)$

1.2) a, b und m sind die Mengen der Sorten in Liter:

$a + b + m = 200$ //Gesamtmenge

$0{,}20 \cdot a + 0{,}16 \cdot b + 0{,}6 \cdot m = 0{,}25 \cdot 200$ //Alkohol

$0{,}10 \cdot a + 0{,}06 \cdot b + 0 \cdot m = 0{,}07 \cdot 200$ //Saft

a=98 b=70 m=32

2.1a) $DB = \mathbb{R} \setminus \{-2;3\}$

Schnittpunkt mit y-Achse $f(0) = -\frac{1}{3}$

Schnittpunkte mit x-Achse (Nullstellen): $x_1 = 1$; $x_2 = 2$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

2.1b) $f'(x) = \frac{2x^2 - 16x + 20}{(x^2 - x - 6)^2}$; genau zwei Extrema bei $x_3 = 1{,}55$ und $x_4 = 6{,}45$

$f(x_3) = 0{,}048$; $f(x_4) = 0{,}832$

Aus der Lage der Polstellen und der Nullstellen ergibt sich zwingend, das bei x_3 ein Maximum sein muss!

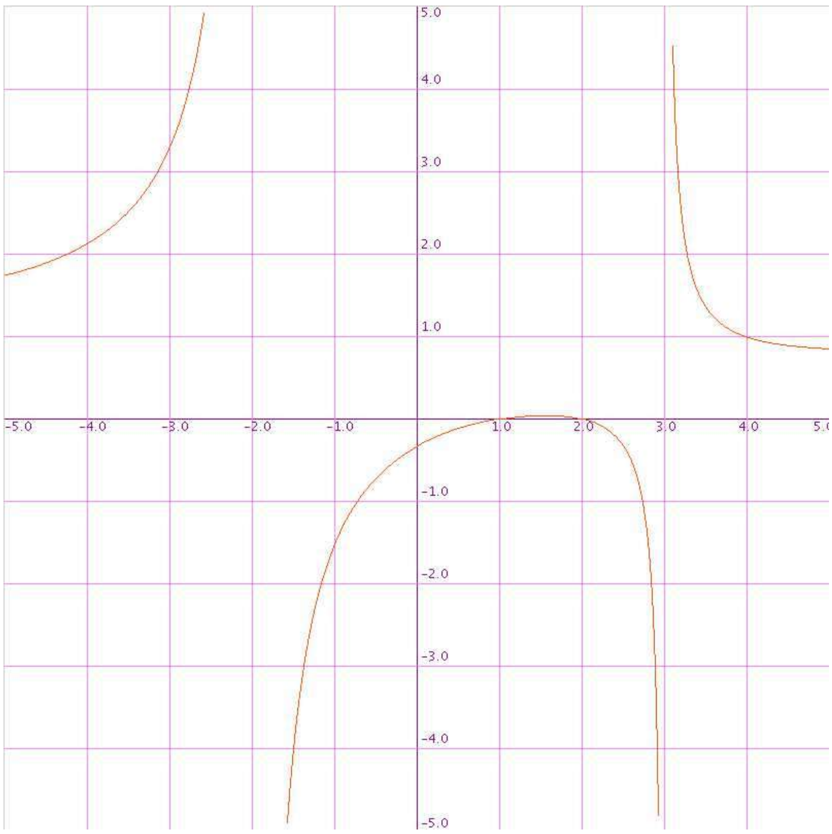
Aus der Polstelle bei 3 und dem Verhalten im Unendlichen ergibt sich ebenso, dass bei x_4 ein Minimum sein muss!

Sie können natürlich auch die zweite Ableitung bilden und einsetzen ...

$$f''(x) = \frac{(4x - 16) \cdot (x^2 - x - 6) - (2x^2 - 16x + 20) \cdot 2 \cdot (2x - 1)}{(x^2 - x - 6)^3}$$

$f''(x_3) = -0{,}37$; $f''(x_4) = 0{,}0115$

2.1c)



2.2a) $1{,}35=c\cdot a^3$ und $2{,}025=c\cdot a^4$; Division ergibt a=1,5; Einsetzen ergibt c=0,4

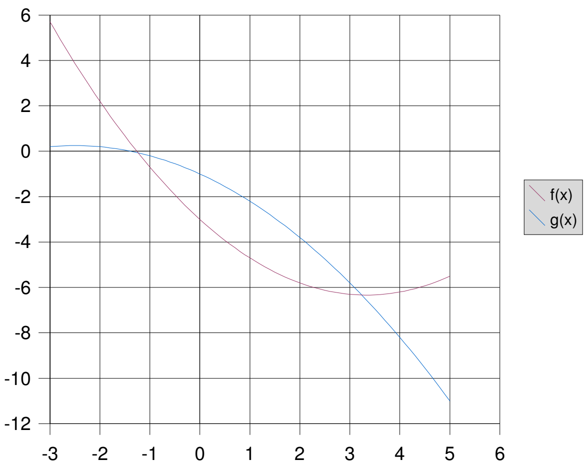
$f(x) = 0{,}4 \cdot 1{,}5^x$

b) Geradengleichung $y=m\cdot x+n$; $m=f\,'(3)$ Einsetzen von x=3 und y=1,35 ergibt n

$f\,'(x)=0{,}4 \cdot \ln(1{,}5) \cdot 1{,}5^x$; $f\,'(3)=0{,}5474$

$y= 0{,}5474 \cdot x + (-0{,}2921)$ // Werte gerundet!

2.3a)



b) $f_{diff}(x) = 0{,}5x^2 - x - 2$ Stammfunktion: $F_d(x) = 0{,}1666x^3 - 0{,}5x^2 - 2x$

Nullstellen von $f_{diff}(x)$: $0= 0{,}5x^2 - x - 2 \quad |\cdot 2$

$0=x^2 -2x - 4$

$x_{1/2} = 1\pm\sqrt{5}$

$$A= \int_{1-\sqrt{5}}^{1+\sqrt{5}} (0{,}5\,x^2-x-2)\;dx = \left[\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2-2\,x\right]_{1-\sqrt{5}}^{1+\sqrt{5}} = 7{,}45356$$

3.1) Umwandeln in trigonometrische bzw. Exponentialform:

$a = 3{,}606\cdot(\cos 33{,}7° + j\cdot\sin 33{,}7°) = 3{,}606 \cdot e^{j\cdot 33{,}7°}$

$a^3 = 3{,}606^3 \cdot e^{j\cdot 3\cdot 33{,}7°} = 46{,}872 \cdot e^{j\cdot 101{,}1°}$

$\sqrt[4]{b} = 1{,}414 \cdot e^{j\cdot(7{,}5° + k\cdot 90°)}$ //vier verschiedene Lösungen für k=0,1,2,3

$\ln c = \ln 3 + j\cdot(120°+k\cdot 360°)$ //unendlich viele Lösungen

$= 1{,}099 + j\cdot 2{,}094$ //für k=0; 120° = 2/3 · π

$= 2{,}365 \cdot e^{j\cdot 62{,}32°}$

3.2a) $0=x^2 - 4x + 5$; $x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-5}$ $x_1 = 2+j$; $x_2 = 2-j$

b) Es ist $\underline{x_1 + x_2} = -2 + j\cdot\sqrt{3} + -2 - j\cdot\sqrt{3} = -4 \underline{= -p}$

Es ist $\underline{x_1 \cdot x_2} = -2 + j\cdot\sqrt{3} \cdot -2 - j\cdot\sqrt{3} = (4+3) + j\cdot 0 \underline{= q}$

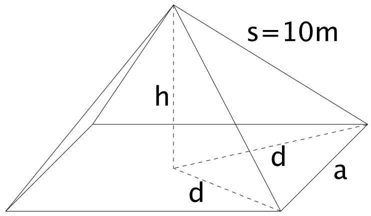
3.3.a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4\\6\\8\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-2\\3\\6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}$ $|\overrightarrow{CB}| = 7$ $|\overrightarrow{AC}| = 7$

b) $\cos\beta = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CB}|} = \dfrac{24+18+16}{\sqrt{116}\cdot 7} = 0{,}7693$ $\underline{\beta = 39{,}71°}$

c) $A = \dfrac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \dfrac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}4\\6\\8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\3\\6\end{pmatrix}\right| = \dfrac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}12\\-40\\24\end{pmatrix}\right| = \dfrac{1}{2}\cdot 48{,}166 = 24{,}08$

d) $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}1\\1{,}5\\2\end{pmatrix}$ <u>D (0; 2,5; 5)</u>

4.1.a) (im Folgenden alle Längen in Meter, das Volumen in Kubikmeter)



b) $V = 1/3 \cdot a^2 \cdot h \rightarrow$ maximal

$s^2 = h^2 + d^2$ und $2 \cdot d^2 = a^2$

$2 \cdot (s^2+h^2) = a^2$, also $200 - 2 \cdot h^2 = a^2$

c,d) $V = 1/3 \cdot (200-2 \cdot h^2) \cdot h$

$= 66{,}67 \cdot h - 0{,}67 \cdot h^3$

$V' = 66{,}67 - 3 \cdot 0{,}67 \cdot h^2$

$0 = 66{,}67 - 2 \cdot h^2$

$h = 5{,}7735$

$a = 11{,}547$

$V = 256{,}6$

4.2.1) Lücke: Zähler und Nenner = Null: $a \cdot (-2)^2+b=0$ und $(-2)^2+c \cdot (-2)=0$

f(4)=1 $\dfrac{a \cdot 4^2+b}{4^2+c \cdot 4} = 1$

<u>c=2</u> (zweite Gleichung)

bleiben: $4a+b=0$

und (c eingesetzt) $16a+b=24$

<u>a=2; b=−8</u>

$$f(x) = \frac{2 \cdot x^2-8}{x^2+2 \cdot x}$$

4.2.2) f: Polstellen bei 0 und 1; <u>Asymptoten: x=0; x=1</u>

für $x \rightarrow \infty$: $f(x) = \dfrac{x^2 \cdot (2-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}{x^2 \cdot (1-\frac{1}{x})}$ $f(x) \rightarrow 2$ <u>Asymptote: y=2</u>

g: Polstelle bei −1; <u>Asymptote: x=−1</u>

$(x^2-x) : (x+1) = x-2$

$\underline{-(x^2+x)}$

$-2x$

$\underline{-(-2x-2)}$

2

$f(x)=x-2 + 2/(x+1)$

<u>Asymptote: y=x−2</u>